Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 9

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

24 de junio de 2023

1. Calcular el Hamiltoniano de Dirac en espacio de momentos.

El Hamiltoniano de Dirac viene dado por

$$H = \int \bar{\psi}(-i\gamma^k \partial_k + m)\psi \, \mathrm{d}^3 x$$

Empecemos usando la ecuación de Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$. La podemos reescribir como

$$(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^k \partial_k - m)\psi = 0 \Longrightarrow (-i\gamma^k \partial_k + m)\psi = i\gamma^0 \partial_0 \psi$$

Por lo que el Hamiltoniano queda

$$H = i \int \psi^\dagger \partial_0 \psi \, \mathrm{d}^3 x$$

Sustituyendo ahora las expresiones para ψ y $\psi^\dagger$

$$\psi = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ipx} \right) \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{r=1}^{2} \int \psi^\dagger (i\partial_0) \left(c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ipx} \right) \frac{\mathrm{d}^3 x}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 p}{\sqrt{2E_p}} \\
&= \sum_{s=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \int \left(c_s^\dagger(\vec{q}) u_s^\dagger(\vec{q}) e^{iqx} + d_s(\vec{q}) v_s^\dagger(\vec{q}) e^{-iqx} \right) \Big(E_p c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ipx} - E_p d_r^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ipx} \Big) \frac{\mathrm{d}^3 x}{(2\pi)^6} \frac{\mathrm{d}^3 p}{\sqrt{2E_p}} \frac{\mathrm{d}^3 q}{\sqrt{2E_q}} \\
&= \sum_{s=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \int E_p \Big(c_s^\dagger(\vec{q}) c_r(\vec{p}) u_s^\dagger(\vec{q}) u_r(\vec{p}) e^{i(q-p)x} - c_s^\dagger(\vec{q}) d_r^\dagger(\vec{p}) u_s^\dagger(\vec{q}) v_r(\vec{p}) e^{i(p+q)x} \\
&\qquad + d_s(\vec{q}) c_r(\vec{p}) v_s^\dagger(\vec{q}) u_r(\vec{p}) e^{-i(p+q)x} - d_s(\vec{q}) d_r^\dagger(\vec{p}) v_s^\dagger(\vec{q}) v_r(\vec{p}) e^{i(p-q)x} \Big) \frac{\mathrm{d}^3 x}{(2\pi)^6} \frac{\mathrm{d}^3 p}{\sqrt{2E_p}} \frac{\mathrm{d}^3 q}{\sqrt{2E_q}}
\end{aligned}$$

Notemos que la único que depende de x son las exponenciales, por lo que podemos integrarlas obteniendo una δ de Dirac, notemos pero que solo estamos integrando respecto de las posiciones, pero no del tiempo, pero podemos escribir $e^{-ipx} = e^{-iEt} e^{i\vec{p}\vec{x}}$, notemos que también podemos usar la delta de Dirac para integrar $\vec{q}$:

$$\begin{aligned}
H = &\sum_{s=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \int E_p \Big(c_s^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p}) u_s^\dagger(\vec{p}) u_r(\vec{p}) - c_s^\dagger(-\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) u_s^\dagger(-\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{2iE_p t} \\
&\qquad + d_s(-\vec{p}) c_r(\vec{p}) v_s^\dagger(-\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-2iE_p t} - d_s(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) v_s^\dagger(\vec{p}) v_r(\vec{p}) \Big) \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 2E_p}
\end{aligned}$$

Fijémonos que solo hay dos casos, $\vec{q} = \vec{p}$ y $\vec{q} = -\vec{p}$, en ambos casos se cumple que $E_q = E_p$. Ahora podemos simplificar esta ecuación usando las fórmulas 9.3 del formulario, quedando el resultado final:

$$H = \sum_{r=1}^{2} \int E_p \Big(c_r^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p}) - d_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) \Big) \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3}$$